

2010

MATHEMATICS

Paper 1

Time : 3 Hours]

[Maximum Marks : 300

INSTRUCTIONS

Each question is printed both in English and in Kannada.

Answers must be written in the medium specified (English or Kannada) in the Admission Ticket issued to you, which must be stated clearly on the cover of the answer book in the space provided for this purpose. In case of any doubt in the Kannada text, please refer to English text.

This paper has four parts :

A	20 marks
B	100 marks
C	90 marks
D	90 marks

Marks allotted to each question are indicated in each part.

*All questions in Part A, Part B and Part C are **compulsory**.
Answer any **three** questions in Part D.*

SEAL

ವಿಶೇಷ ಸೂಚನೆ : ಈ ಮೇಲ್ಕಂಡ ಸೂಚನೆಗಳ ಕನ್ನಡ ಭಾಷಾಂತರವನ್ನು ಈ ಪ್ರಶ್ನೆ ಪತ್ರಿಕೆಯ ಕೊನೆಯ ಪುಟದಲ್ಲಿ ಮುದ್ರಿಸಲಾಗಿದೆ.

PART A

4×5=20

Each question carries 5 marks.

1. (a) Show that the set $S = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ is a basis of the vector space $V_3(\mathbb{R})$.
- (b) Let $f(x, y)$ be a function defined by

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + xy + x + y}{x + y}; & (x, y) \neq (2, 2) \\ 4 & ; (x, y) = (2, 2) \end{cases}$$

Discuss the continuity of $f(x, y)$ at the point $(2, 2)$. If it is discontinuous, what type of discontinuity is it?

- (c) Solve $2y dx + (2x \log x - xy) dy = 0$
- (d) Find the directional derivative of $\phi = xy^2 - yz^3$ at $(2, 1, 1)$ in the direction of the normal to the surface $x \log z + y^2 = 0$ at $(1, 2, 1)$.

ಪ್ರತಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗೂ 5 ಅಂಕಗಳು.

1. (ಎ) $S = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ ಗಣವು ದಿಶಾಯುಕ್ತ ಅವಕಾಶ $V_3(\mathbb{R})$ ನ ಆಧಾರವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿ.

(ಬಿ) $f(x, y)$ ಎಂಬುದು ಈ ಕೆಳಗಿನದರಿಂದ ವಿವರಿಸಲ್ಪಡುವ ಒಂದು ಪರಿಮಾಣವಾಗಿರಲಿ

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + xy + x + y}{x + y}; & (x, y) \neq (2, 2) \\ 4 & ; (x, y) = (2, 2) \end{cases}$$

(2, 2) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ $f(x, y)$ ನ ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ ಕುರಿತು ಚರ್ಚಿಸಿ. ಇದು ವಿಚ್ಛಿನ್ನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದು ಯಾವ ರೀತಿಯ ವಿಚ್ಛಿನ್ನತೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಸಿ.

(ಸಿ) $2y dx + (2x \log x - xy) dy = 0$ ಈ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.

(ಡಿ) (1, 2, 1) ರಲ್ಲಿ, $x \log z + y^2 = 0$ ಮೇಲ್ಮೈಗೆ ಸಾಧಾರಣವಾಗಿರುವ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ (2, 1, 1) ರಲ್ಲಿರುವ $\phi = xy^2 - yz^3$ ಯ ದಿಶಾತ್ಮಕ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

PART B

10×10=100

Each question carries 10 marks.

2. Define (i) Eigen values, (ii) Eigen vectors and (iii) Eigen space of a linear transformation.

Find the eigen values and eigen vectors of the matrix of the linear

$$\text{transformation } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

3. Define Rank and Nullity of linear transformation.

$$T : V_3(\mathbb{R}) \rightarrow V_3(\mathbb{R}) \text{ defined by}$$

$$T(e_1) = (1, 1, 0), \quad T(e_2) = (0, 1, 1), \quad T(e_3) = (1, 2, 1).$$

Find the range, null space, rank, nullity and hence verify the rank-nullity theorem.

4. (a) Find the constants a and b so that

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + a \cos x) - b \sin x}{x^3} = 1$$

- (b) Trace the curve catenary $y = c \cosh \frac{x}{c}$ ($c > 0$).

5. (a) Find all the asymptotes of the curve

$$x^3 + 3x^2y - 4y^3 - x + y + 3 = 0$$

- (b) Prove that

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

6. Find the equation to the sphere which passes through the circle $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - y + 3z + 12 = 0$, $2x + 3y - 7z = 10$ and touches the plane $x - 2y + 2z = 1$.

ಭಾಗ B

10×10=100

ಪ್ರತಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗೂ 10 ಅಂಕಗಳು.

2. ಒಂದು ರೇಖೀಯ ರೂಪಾಂತರದ (i) ಐಗನ್ ಮೌಲ್ಯಗಳು (ii) ಐಗನ್ ವೆಕ್ಟರ್‌ಗಳು ಮತ್ತು (iii) ಐಗನ್ ಅವಕಾಶಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಿ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

ರೇಖೀಯ ರೂಪಾಂತರದ ಮಾತೃಕೆಯ ಐಗನ್ ಮೌಲ್ಯಗಳು ಹಾಗೂ ಐಗನ್ ವೆಕ್ಟರ್‌ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. ರೇಖೀಯ ರೂಪಾಂತರದ ಶ್ರೇಣಿ ಮತ್ತು ಅನೂರ್ಜಿತತೆಯನ್ನು ವಿವರಿಸಿ

$$T : V_3(\mathbb{R}) \rightarrow V_3(\mathbb{R}) \quad \text{ಇದು ಕೆಳಗಿನ ದರಿಂದ ವಿವರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿದೆ}$$

$$T(e_1) = (1, 1, 0), \quad T(e_2) = (0, 1, 1), \quad T(e_3) = (1, 2, 1).$$

ಇದರ ರೇಂಜ್, ಊರ್ಜಿತವಲ್ಲದ ಅವಕಾಶ, ಶ್ರೇಣಿ, ಅನೂರ್ಜಿತತೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು ಅನಂತರ ಶ್ರೇಣಿ-ಅನೂರ್ಜಿತತೆ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

4. (ಎ) ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹಾಗೆ ಇರುವಂತೆ a ಮತ್ತು b ನಿಯತಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + a \cos x) - b \sin x}{x^3} = 1$$

- (ಬಿ) ಕ್ಯಟೆನರಿ $y = c \cosh \frac{x}{c}$ ($c > 0$) ಯನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ ಚಿತ್ರಿಸಿ.

5. (ಎ) ಈ ಕೆಳಕಂಡ ವಕ್ರದ ಎಲ್ಲ ಸಂಪಾತ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ

$$x^3 + 3x^2y - 4y^3 - x + y + 3 = 0$$

- (ಬಿ) ಇದನ್ನು ರುಜುವಾತು ಮಾಡಿ ತೋರಿಸಿ

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

6. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - y + 3z + 12 = 0$, $2x + 3y - 7z = 10$ ವೃತ್ತದ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಹಾಗೂ $x - 2y + 2z = 1$ ಸಮತಲವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವ ಗೋಲದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

[Turn over

7. (a) Solve $\frac{dy}{dx} + x \sin 2y = x^3 \cos^2 y$.
- (b) Solve $x \cos \left(\frac{y}{x} \right) (y dx + x dy) = y \sin \left(\frac{y}{x} \right) (x dy - y dx)$.
8. (a) Find the spherical polar co-ordinates of the point whose cartesian co-ordinates are $\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}, \frac{9}{4}, \frac{3}{2} \right)$.
- (b) Express the vector $\vec{f} = z\hat{i} - 2x\hat{j} + y\hat{k}$ in terms of spherical polar co-ordinates and find f_r , f_θ and f_ϕ .
9. Prove that
- (a) $[ij, k] + [jk, i] = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}$
- (b) $\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^j} = -g^{hk} \begin{Bmatrix} i \\ hj \end{Bmatrix} - g^{hi} \begin{Bmatrix} k \\ hj \end{Bmatrix}$
10. Prove that the necessary and sufficient condition that a rigid body acted upon by a number of coplanar forces be in equilibrium is that the algebraic sum of the virtual work done by the forces in any small displacement, consistent with the geometrical conditions of the system is zero.
11. A thin uniform rod of length $2a$ and weight W has a particle of weight W' attached to a point D near the end A , $AD = 2b$. The rod floats in an inclined position freely in water with a length $AC = 2x$, immersed, prove that $x = \frac{aW + bW'}{W + W'}$ and that specific gravity ρ of the rod is given by

$$a\rho(W + W')^2 = W(aW + bW').$$

7. (ಎ) ಬಿಡಿಸಿ $\frac{dy}{dx} + x \sin 2y = x^3 \cos^2 y$.

(ಬಿ) ಬಿಡಿಸಿ $x \cos \left(\frac{y}{x} \right) (y dx + x dy) = y \sin \left(\frac{y}{x} \right) (x dy - y dx)$.

8. (ಎ) ಕಾರ್ಟೀಶಿಯನ್ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳು $\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}, \frac{9}{4}, \frac{3}{2} \right)$ ಆಗಿರುವ ಬಿಂದುವಿನ ಗೋಳಾಕೃತಿಯ ಧ್ರುವೀಯ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ಬಿ) ಗೋಳಾಕೃತಿಯ ಧ್ರುವೀಯ ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳ ಪದಗಳಲ್ಲಿ $\vec{f} = z\hat{i} - 2x\hat{j} + y\hat{k}$ ವೆಕ್ಟರ್ ಅನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ ಮತ್ತು f_1, f_2 ಹಾಗೂ f_3 ಗಳನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

9. ಈ ಕೆಳಗಿನದನ್ನು ರುಜುವಾತು ಪಡಿಸಿ

(ಎ) $[ij, k] + [jk, i] = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}$

(ಬಿ) $\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^j} = -g^{hk} \begin{Bmatrix} i \\ hj \end{Bmatrix} - g^{hi} \begin{Bmatrix} k \\ hj \end{Bmatrix}$

10. ಅನೇಕ ಕೋಷ್ಟೇನಾರ್ ಬಲಗಳ ಕ್ರಿಯೆಗೆ ಒಳಪಟ್ಟಿರುವ ಒಂದು ಧೃಢಕಾಯವು ಸಮತೋಲನದಲ್ಲಿರುವುದಕ್ಕೆ ಅಗತ್ಯವಾದ ಹಾಗೂ ಸಮರ್ಪಕವಾದ ಷರತ್ತು ಯಾವುದೆಂದರೆ, ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಸ್ಥಿತಿಗಳಿಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಯಾವುದೇ ಚಿಕ್ಕ ಸ್ಥಾನಪಲ್ಲಟದಲ್ಲೂ ಈ ಬಲಗಳಿಂದ ನಡೆದ ಕಾರ್ಯತಃ ಕೆಲಸದ ಬೀಜ ಗಣಿತೀಯ ಮೊತ್ತವು ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿರಬೇಕು ಎಂಬುದನ್ನು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿ ತೋರಿಸಿ.

11. 2a ಉದ್ದ ಮತ್ತು W ತೂಕವಿರುವ ಒಂದು ತೆಳುವಾದ ಸಮಾನವಾದ ಸರಳು W' ತೂಕದ ಕಣವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದು, ಈ ಸರಳನ್ನು A ತುದಿಯ ಸಮೀಪ D ಎಂಬ ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಜೋಡಣೆ ಮಾಡಲಾಗಿದೆ. AD = 2b. ಈ ಸರಳು ವಾಲಿಕೊಂಡ ಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿ ಮುಕ್ತವಾಗಿ ನೀರಿನಲ್ಲಿ ತೇಲುತ್ತಿದೆ ಮತ್ತು ಅದರ AC = 2x ಉದ್ದವು ನೀರಿನಲ್ಲಿ ಮುಳುಗಿದೆ. $x = \frac{aW + bW'}{W + W'}$ ಎಂಬುದನ್ನು ರುಜುವಾತು ಪಡಿಸಿ. ಸರಳಿನ ಸಾಪೇಕ್ಷ ಸಾಂದ್ರತೆ ρ ಈ ರೀತಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ

$$\rho(W + W')^2 = W(aW + bW').$$

[Turn over

PART C

6×15=90

Each question carries 15 marks.

12. Define Hermitian, Skew Hermitian and Unitary matrices with an example each.

- (a) Prove that the eigen values of a Hermitian matrix are real.
 (b) Prove that the eigen values of a Skew – Hermitian matrix are pure imaginary or zero.

13. (a) Evaluate $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{2-y} xy \, dx \, dy$ by changing the order of integration.

(b) Evaluate $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \frac{dx \, dy \, dz}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}}$

14. State Serret – Frenet formulae. Derive the expressions for curvature and torsion in terms of the derivatives of \vec{r} w.r.t. the parameter u , where $\vec{r} = \vec{r}(u)$ is the equation of the curve.

15. Solve

(a) $\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} = x^2 + 1$

(b) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 4y = e^x \sin x$

16. State Stokes theorem.

Verify divergence theorem for $\vec{F} = 4x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ over the region bounded by the planes $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ and $2x + y + 2z = 6$.

ಪ್ರತಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗೂ 15 ಅಂಕಗಳು.

12. ಹರ್ಮಿಶಿಯನ್, ಸ್ಕಾಲ್ಯರ್ ಹರ್ಮಿಶಿಯನ್ ಮತ್ತು ಯೂನಿಟರಿ ಮಾತ್ರಿಕೆಗಳನ್ನು ಪ್ರತಿಯೊಂದಕ್ಕೂ ಒಂದೊಂದು ಉದಾಹರಣೆ ಕೊಟ್ಟು ವಿವರಿಸಿ.

(ಎ) ಹರ್ಮಿಶಿಯನ್ ಮಾತ್ರಿಕೆಯ ಐಗೆನ್ ಮೌಲ್ಯ (eigen) ಗಳು ನೈಜವಾಗಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ರುಜುವಾತು ಪಡಿಸಿ.

(ಬಿ) ಸ್ಕಾಲ್ಯರ್ ಹರ್ಮಿಶಿಯನ್ ಮಾತ್ರಿಕೆಯ ಐಗೆನ್ ಮೌಲ್ಯಗಳು ಸಂಪೂರ್ಣ ಕಾಲ್ಪನಿಕ ಅಥವಾ ಸೊನ್ನೆ ಎಂಬುದನ್ನು ರುಜುವಾತು ಪಡಿಸಿ.

13. (ಎ) ಇಂಟಿಗ್ರೇಶನ್ನಿನ ಕ್ರಮವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸುವ ಮೂಲಕ $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{2-y} xy \, dx \, dy$ ನ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ಬಿ) $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \frac{dx \, dy \, dz}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}}$ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

14. ಸೆರೆಟ್ - ಫ್ರೆನೆಟ್ ಸೂತ್ರಗಳನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ. u ಪ್ಯಾರಾಮೀಟರ್‌ಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದಂತೆ \vec{r} ನ ನಿಷ್ಪತ್ತಿಗಳ ಪದಗಳಿಂದ ವಕ್ರತೆ ಹಾಗೂ ಭ್ರಮಣ ಸೆಳೆತಗಳಿಗೆ ರಾಶಿಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇಲ್ಲಿ $\vec{r} = \vec{r}(u)$ ಎನ್ನುವುದು ವಕ್ರದ ಸಮೀಕರಣ.

15. ಬಿಡಿಸಿ

(ಎ) $\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} = x^2 + 1$

(ಬಿ) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 4y = e^x \sin x$

16. ಸ್ಟೋಕ್ಸ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ತಿಳಿಸಿ.

$x = 0, y = 0, z = 0$ ಮತ್ತು $2x + y + 2z = 6$ ಅಸಮತಲಗಳಿಂದ ಪರಿಮಿತಿಗೆ

ಒಳಪಟ್ಟಿರುವ ಪ್ರದೇಶದ ಮೇಲೆ $\vec{F} = 4x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ಗೆ ವಿಮುಖಿತ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

17. (a) At the end of 3 successive seconds, the distances of a point moving with simple harmonic motion from the centre of motion are 1, 5, 5.

Show that the period of a complete oscillation is $\frac{2\pi}{\cos^{-1} \frac{3}{5}}$.

- (b) A cricket ball thrown from a height of 6 feet at an angle 30° with the horizon with a speed of 60 ft/sec is caught by another fieldsman at a height of 2 ft from the ground. How far apart are the two men ?
- (c) A particle describes the curve $r^2 = a^2 \sin 2\theta$ under a force f to the pole. Find the law of force.

17. (ಎ) ಒಂದು ಸರಳ ಹಾರ್ಮೋನಿಕ್ ಚಲನೆಯೊಂದಿಗೆ ಚಲಿಸುತ್ತಿರುವ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನ ಅಂತರಗಳು 3 ಅನುಕ್ರಮಿತ ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ, ಚಲನೆಯ ಕೇಂದ್ರದಿಂದ 1, 5, 5. ಆಗಿವೆ. ಸಂಪೂರ್ಣ ಅಂದೋಲನದ ಅವಧಿಯು $\frac{2\pi}{\cos^{-1} \frac{3}{5}}$ ಆಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿ.
- (ಬಿ) ಕ್ಷಿತಿಜದಿಂದ 30° ಕೋನದಲ್ಲಿ 60 ಅಡಿ/ಸೆಕೆಂಡು ವೇಗದಲ್ಲಿ ಆರು ಅಡಿಗಳ ಎತ್ತರದಿಂದ ಎಸೆಯಲಾದ ಒಂದು ಕ್ರಿಕೆಟ್ ಚೆಂಡನ್ನು ಫೀಲ್ಡ್ ಮಾಡುತ್ತಿರುವ ಇನ್ನೊಬ್ಬ ವ್ಯಕ್ತಿ ನೆಲದಿಂದ 2 ಅಡಿಗಳ ಎತ್ತರದಲ್ಲಿ ಹಿಡಿಯುತ್ತಾನೆ. ಈ ಇಬ್ಬರೂ ವ್ಯಕ್ತಿಗಳ ನಡುವೆ ಇರುವ ಅಂತರ ಎಷ್ಟು ?
- (ಸಿ) ಒಂದು ವಸ್ತುವು f ಎಂಬ ಬಲಕ್ಕೆ ಒಳಪಟ್ಟು ದ್ರವದ ಸುತ್ತ $r^2 = a^2 \sin 2\theta$ ಎಂಬ ವಕ್ರವನ್ನು ರೂಪಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಬಲದ ನಿಯಮವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

[Turn over

PART D

3×30=90

Answer any **three** of the following questions. Each question carries 30 marks.

18. (a) (i) When is a real non-singular quadratic form $Q = \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X}$ (with $|\mathbf{A}| \neq 0$) said to be (i) Positive definite and (ii) Negative definite ?
- (ii) Determine the nature, index and signature of the quadratic form

$$2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

- (b) Expand $e^x \cos y$ in a Taylor's series about the point $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ up to second degree terms.
- (c) Show that a rectangular solid of maximum volume which can be inscribed in a sphere is a cube.

19. (a) Show that the lines $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$ and $\frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-6}{4}$ are coplanar and find the equation of the plane containing them and their point of intersection.

- (b) For any vector \vec{f} and \vec{g} , prove that

$$\nabla \left(\vec{f} \cdot \vec{g} \right) = \vec{f} \times \text{curl } \vec{g} + \vec{g} \times \text{curl } \vec{f} + \left(\vec{f} \cdot \nabla \right) \vec{g} + \left(\vec{g} \cdot \nabla \right) \vec{f}$$

$$\text{and hence deduce } \text{grad } f^2 = 2 \left[\vec{f} \times \text{curl } \vec{f} + \left(\vec{f} \cdot \nabla \right) \vec{f} \right].$$

- (c) Find the volume and surface area of the solid generated by revolving the asteroid $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ about the x-axis.

ಭಾಗ D

3×30=90

ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ. ಪ್ರತಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗೂ 30 ಅಂಕಗಳು.

18. (ಎ) (i) ಒಂದು ನೈಜ ಏಕಾತ್ಮಕವಲ್ಲದ ಕ್ವಾಡ್ರಾಟಿಕ್ ರೂಪ $Q = X^TAX$ ($|A| \neq 0$ ರೊಂದಿಗೆ) ವನ್ನು ಯಾವಾಗ (i) ಪಾಸಿಟಿವ್ ಡೆಫಿನೈಟ್ ಮತ್ತು (ii) ನೆಗೆಟಿವ್ ಡೆಫಿನೈಟ್ ಆಗಿದೆ ಎಂದು ಹೇಳಲಾಗುತ್ತದೆ ?

(ii) ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಕ್ವಾಡ್ರಾಟಿಕ್ ರೂಪದ ಸ್ವಭಾವ, ಇಂಡೆಕ್ಸ್ ಹಾಗೂ ಸಿಗ್ನೇಚರ್ ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

$$2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

(ಬಿ) $\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೇಲಿರುವ ಟೈಲರ್ಸ್ ಸರಣಿಯಲ್ಲಿನ $e^x \cos y$ ಅನ್ನು ಎರಡನೇ ಡಿಗ್ರೀ ಟರ್ಮ್‌ಗಳ ವರೆಗೆ ಹಿಗ್ಗಿಸಿ.

(ಸಿ) ಒಂದು ಗೋಳದಲ್ಲಿ ಇನಸ್ಟ್ರೈಬ್ ಮಾಡಬಹುದಾದ ಗರಿಷ್ಠ ಗಾತ್ರದ ಆಯತಾಕಾರದ ಘನವು ಘನಾಕೃತಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿ ತೋರಿಸಿ.

19. (ಎ) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$ ಮತ್ತು $\frac{x-2}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-6}{4}$ ರೇಖೆಗಳು ಒಂದೇ ಸಮತಲದಲ್ಲಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿ ತೋರಿಸಿ ಹಾಗೂ ಇವುಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಸಮತಲದ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಛೇದನದ ಬಿಂದುವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ಬಿ) \vec{f} ಮತ್ತು \vec{g} ಎಂಬ ಯಾವುದೇ ವೆಕ್ಟರ್‌ಗೆ

$$\nabla(\vec{f} \cdot \vec{g}) = \vec{f} \times \text{curl } \vec{g} + \vec{g} \times \text{curl } \vec{f} + (\vec{f} \cdot \nabla)\vec{g} + (\vec{g} \cdot \nabla)\vec{f}$$

ಎಂಬುದನ್ನು ರುಜುವಾತುಪಡಿಸಿ ಮತ್ತು ಈ ಕಾರಣದಿಂದ

$$\text{ಗ್ರಾಡ್ } f^2 = 2 \left[\vec{f} \times \text{curl } \vec{f} + (\vec{f} \cdot \nabla)\vec{f} \right] \text{ ನ್ನು ಊಹೆ ಮಾಡಿ.}$$

(ಸಿ) ಆಸ್ಟರಾಯಿಡ್ $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ಯನ್ನು x -ಅಕ್ಷದ ಮೇಲೆ ಪರಿಕ್ರಮಿಸುವ ಮೂಲಕ ಉತ್ಪತ್ತಿಯಾಗುವ ಘನದ ಗಾತ್ರ ಹಾಗೂ ಮೇಲ್ಮೈ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

[Turn over

20. (a) Show that $\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ $m, n > 0$ and hence deduce

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

(b) State Lagrange's Mean Value theorem. Using the function

$$f(x) = \tan^{-1}x, \text{ show that } \frac{m-n}{1+m^2} < \tan^{-1}m - \tan^{-1}n < \frac{m-n}{1+n^2},$$

$$0 < n < m \text{ and deduce that } \frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \tan^{-1}\frac{4}{3} < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}.$$

(c) Verify Stoke's theorem for the vector field

$$\vec{F} = (3x - y)\hat{i} - 2yz^2\hat{j} - 2y^2z\hat{k}, \text{ where } S \text{ is the surface of the sphere } x^2 + y^2 + z^2 = 16, z > 0.$$

21. (a) Define :

(i) Contravariant tensor of rank two

(ii) Covariant tensor of rank two

Show that the inner product of the tensors A_r^p and B_t^{qs} is a tensor of rank three.

(b) Define stable, unstable and neutral equilibrium.

A uniform beam of length L rests with its ends on two smooth planes which intersect in a horizontal line. If the inclinations of the planes to the horizontal are α and β ($\beta > \alpha$), show that the inclination θ of the beam to the horizontal in one of the equilibrium positions is given by $2 \tan \theta = \cot \alpha - \cot \beta$, and show that the beam is unstable in this position.

(c) A particle slides down the outside of a smooth vertical circle due to its weight, starting from rest at the highest point. Discuss its motion.

20. (ಎ) $\beta(m, n) = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ $m, n > 0$ ಎಂಬುದನ್ನು ರುಜುವಾತುಪಡಿಸಿ ಮತ್ತು ಆ ಮೂಲಕ $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ ಅನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ.

(ಬಿ) ಲ್ಯಾಗ್ರಾಂಜೆಸ್‌ನ ಮೀನ್ ವ್ಯಾಲ್ಯೂ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿ. $f(x) = \tan^{-1}x$, ಬಳಸಿಕೊಂಡು $\frac{m-n}{1+m^2} < \tan^{-1} m - \tan^{-1} n < \frac{m-n}{1+n^2}$, $0 < n < m$ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿ ಮತ್ತು $\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \tan^{-1} \frac{4}{3} < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$ ಎಂದು ನಿರೂಪಿಸಿ.

(ಸಿ) $\vec{F} = (3x - y)\hat{i} - 2yz^2\hat{j} - 2y^2z\hat{k}$, ವೆಕ್ಟರ್ ಕ್ಷೇತ್ರಕ್ಕೆ ಸ್ಟೋಕ್ಸ್ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಇಲ್ಲಿ S ಎನ್ನುವುದು $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z > 0$ ಗೋಲದ ಮೇಲ್ಮೈಯಾಗಿದೆ.

21. (ಎ) ಇವುಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಿ :

(i) ಶ್ರೇಣಿ ಎರಡರ ಕಾಂಟ್ರಾವೇರಿಯೆಂಟ್ ಟೆನ್ಸರ್

(ii) ಶ್ರೇಣಿ ಎರಡರ ಕೋವೇರಿಯೆಂಟ್ ಟೆನ್ಸರ್

A_r^p ಮತ್ತು B_t^{qs} ಟೆನ್ಸರ್‌ಗಳ ಅಂತರಿಕ ಉಪಲಬ್ಧವು ಶ್ರೇಣಿ ಮೂರರ ಟೆನ್ಸರ್ ಆಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿ.

(ಬಿ) ಸ್ಥಿರ, ಅಸ್ಥಿರ ಮತ್ತು ತಟಸ್ಥ ಸಮತೋಲನಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಿ.

L ಉದ್ದವಿರುವ ಒಂದು ಸಮಾನರೂಪದ ತೊಲೆಯು ಅದರ ತುದಿಗಳು ಎರಡು ನಯವಾದ ಸಮತಲಗಳ ಮೇಲಿರುವಂತೆ ನೆಲೆಸಿದೆ. ಈ ಸಮತಲಗಳು ಕ್ಷಿತಿಜೀಯ ರೇಖೆಯಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತಿವೆ. ಕ್ಷಿತಿಜತಲಕ್ಕೆ ಸಮತಲಗಳ ವಾಲುವಿಕೆಗಳು α ಮತ್ತು β ($\beta > \alpha$) ಆಗಿದ್ದರೆ, ಒಂದಾನೊಂದು ಸಮತೋಲನ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಕ್ಷಿತಿಜತಲಕ್ಕೆ ತೊಲೆಯ θ ವಾಲುವಿಕೆಯು $2 \tan \theta = \cot \alpha - \cot \beta$ ಎಂದು ಕೊಡಬಹುದಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿ ಮತ್ತು ಈ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ತೊಲೆಯು ಅಸ್ಥಿರವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿ.

(ಸಿ) ಒಂದು ಕಣವು ಅತಿ ಎತ್ತರದ ಬಿಂದುವಿನ ತನ್ನ ವಿಶ್ರಾಂತ ಸ್ಥಿತಿಯಿಂದ ಒಂದು ನಯವಾದ ಲಂಬವೃತ್ತದ ಹೊರಭಾಗದ ಮೇಲಿನಿಂದ ತನ್ನ ತೂಕದ ಕಾರಣ ಕೆಳಗೆ ಜಾರುತ್ತದೆ. ಇದರ ಚಲನೆ ಕುರಿತು ಚರ್ಚಿಸಿ.

[Turn over

22. (a) Define central force and central orbit. Show that the differential equation of the path traced by the moving particle under the action of central force is $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{f}{h^2u^2}$.
- (b) A quadrilateral is immersed vertically having two sides of length '2a' and 'a' parallel to the surface at depth '2h' respectively. Show that the depth of the centre of pressure is $\frac{3}{2} h$.
- (c) A given volume of heavy fluid is at rest under the action of a force to a fixed point varying as the distance from that point. Find the pressure at the point (a, b, c).

22. (ಎ) ಕೇಂದ್ರ ಬಲ ಮತ್ತು ಕೇಂದ್ರ ಕಕ್ಷೆಯನ್ನು ವಿವರಿಸಿ. ಕೇಂದ್ರಬಲದ ಕ್ರಿಯೆಯಿಂದ, ಚಲಿಸುವ ಕಣವು ಅನುಸರಿಸಿದ ಮಾರ್ಗದ ವಿಭೇದೀಯ ಸಮೀಕರಣವು $\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{f}{h^2u^2}$ ಆಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿ ತೋರಿಸಿ.
- (ಬಿ) '2h' ಆಳದಲ್ಲಿ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಮೇಲ್ಮೈಗೆ ಸಮಾನಾಂತರದಲ್ಲಿರುವ '2a' ಮತ್ತು 'a' ಉದ್ದಗಳ ಎರಡು ಬದಿಗಳನ್ನುಳ್ಳ ಒಂದು ಚತುರ್ಭುಜವನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ ಮುಳುಗಿಸಲಾಗಿದೆ. ಒತ್ತಡದ ಕೇಂದ್ರದ ಆಳವು $\frac{3}{2} h$ ಆಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿ ತೋರಿಸಿ.
- (ಸಿ) ಒಂದು ಭಾರವಾದ ದ್ರವದ ನಿರ್ದಿಷ್ಟಗಾತ್ರವು, ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬಿಂದುವಿನ ಮೇಲಿರುವ ಬಲಕ್ಕೆ ಒಳಪಟ್ಟು ವಿಶ್ರಾಂತ ಸ್ಥಿತಿಯಲ್ಲಿದೆ. ಈ ಬಿಂದುವಿನಿಂದ ಬೇರೆ ಬೇರೆ ದೂರಗಳಲ್ಲಿ ಬಲವು ವ್ಯತ್ಯಾಸವಾಗುತ್ತದೆ, ಬಿಂದುವಿನ (a, b, c) ಮೇಲಿರುವ ಒತ್ತಡವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

2010

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ
ಪ್ರಶ್ನೆಪತ್ರಿಕೆ 1

ಸಮಯ : 3 ಗಂಟೆಗಳು]

[ಗರಿಷ್ಠ ಅಂಕಗಳು : 300

ಸೂಚನೆಗಳು

ಪ್ರತಿ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಇಂಗ್ಲೀಷ್ ಹಾಗೂ ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಮುದ್ರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ನಿಮ್ಮ ಪ್ರವೇಶ ಪತ್ರದಲ್ಲಿ ನಮೂದಿಸಿರುವ ಮಾಧ್ಯಮದಲ್ಲೇ (ಇಂಗ್ಲೀಷ್ ಅಥವಾ ಕನ್ನಡ) ನೀವು ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಬರೆಯತಕ್ಕದ್ದು; ಇದನ್ನು ಉತ್ತರ ಪತ್ರಿಕೆಯ ಮುಖಪುಟದಲ್ಲಿ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ನೀಡಲಾದ ಜಾಗದಲ್ಲಿ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ನಮೂದಿಸತಕ್ಕದ್ದು. ಕನ್ನಡ ಪ್ರಶ್ನೆಪತ್ರಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಸಂದೇಹ ಉಂಟಾದಲ್ಲಿ, ಇಂಗ್ಲೀಷ್ ಪ್ರಶ್ನೆಪತ್ರಿಕೆಯನ್ನು ದಯವಿಟ್ಟು ಗಮನಿಸಿ.

ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಪತ್ರಿಕೆಯಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು ಭಾಗಗಳಿವೆ :

- | | |
|---|------------|
| A | 20 ಅಂಕಗಳು |
| B | 100 ಅಂಕಗಳು |
| C | 90 ಅಂಕಗಳು |
| D | 90 ಅಂಕಗಳು |

ಪ್ರತಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗೂ ನಿಗದಿಸಲಾದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಒಂದೊಂದು ಭಾಗದಲ್ಲಿಯೂ ನಮೂದಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಭಾಗ A, B ಮತ್ತು C ಯಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಕಡ್ಡಾಯವಾಗಿ ಉತ್ತರಿಸಿ.

ಭಾಗ D ಯಲ್ಲಿಯ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ.

Note : The English version of the instructions is printed on the front cover of this question paper.

SEAL

2010

MATHEMATICS

Paper 2

Time : 3 Hours]

[Maximum Marks : 300

INSTRUCTIONS

Each question is printed both in English and in Kannada.

Answers must be written in the medium specified (English or Kannada) in the Admission Ticket issued to you, which must be stated clearly on the cover of the answer book in the space provided for this purpose. In case of any doubt in the Kannada text, please refer to English text.

This paper has four parts :

A	20 marks
B	100 marks
C	90 marks
D	90 marks

Marks allotted to each question are indicated in each part.

*All questions in Part A, Part B and Part C are **compulsory**.*

*Answer any **three** questions in Part D.*

ವಿಶೇಷ ಸೂಚನೆ : ಈ ಮೇಲ್ಕಂಡ ಸೂಚನೆಗಳ ಕನ್ನಡ ಭಾಷಾಂತರವನ್ನು ಈ ಪ್ರಶ್ನೆ ಪತ್ರಿಕೆಯ ಕೊನೆಯ ಪುಟದಲ್ಲಿ ಮುದ್ರಿಸಲಾಗಿದೆ.

PART A

4×5=20

Each question carries 5 marks.

1. (a) Prove that a subset H of a group G is a subgroup of G if and only if $HH^{-1} = H$.
- (b) Test the convergence of the improper integral $\int_0^{\infty} \frac{x \tan^{-1} x}{(1+x^4)^{\frac{1}{3}}} dx$.
- (c) Form a partial differential equation by eliminating the arbitrary functions f and g in $z = \frac{1}{y} [f(x + ay) + g(x - ay)]$.
- (d) Find the moment of inertia of a thin spherical shell (uniform hollow sphere) about its diameter.

ಪ್ರತಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗೂ 5 ಅಂಕಗಳು.

1. (ಎ) $HH^{-1} = H$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಹಾಗೆ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ G ಸಮೂಹದ H ಉಪಗಣವು G ಯ ಉಪ ಸಮೂಹವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿಕೊರಿಸಿ.
- (ಬಿ) ಅಸಮರ್ಪಕ ಇಂಟಿಗ್ರಲ್ $\int_0^{\infty} \frac{x \tan^{-1} x}{(1+x^4)^{\frac{1}{3}}} dx$ ಇದರ ಅಭಿಗಾಮಿತ್ವವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.
- (ಸಿ) $z = \frac{1}{y} [f(x+ay) + g(x-ay)]$ ಯಲ್ಲಿರುವ f ಮತ್ತು g ಯಾದೃಚ್ಛಿಕ ಪರಿಮಾಣಗಳನ್ನು ನಿವಾರಿಸುವ ಮೂಲಕ ಆಂಶಿಕ ವಿಭೇದೀಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ರೂಪಿಸಿ.
- (ಡಿ) ಒಂದು ತೆಳುವಾದ ಗೋಳಾಕಾರದ ಶೆಲ್ಲಿನ (ಒಂದೇ ರೂಪದ ಟೊಳ್ಳುಗೋಳ) ಆಫೂರ್ಣ ಜಡತ್ವವನ್ನು ಅದರ ವ್ಯಾಸದ ಮೇಲೆ ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

PART B

10×10=100

Each question carries 10 marks.

2. Prove that every homomorphic image G' of a group G is isomorphic to some quotient group thereof.
3. (a) Let $\{f_n\}$ be a sequence of functions, such that $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, $x \in [a, b]$ and let $M_n = \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)|$.
Then prove that $f_n \rightarrow f$ uniformly on $[a, b]$ if and only if $M_n \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$.
- (b) Show that the sequence $\{f_n\}$ where $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ is not uniformly convergent in any interval containing zero.
4. If $u - v = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2)$ and $f(z) = u + iv$ is an analytic function of $z = x + iy$, find $f(z)$ in terms of z .
5. Find the complete integral of $p^2x + q^2y = z$ by Charpit's method.
6. A particle of mass 'm' moves in a conservative force field. Find (i) the Lagrangian and (ii) the equations of motion in cylindrical co-ordinates.
7. Find a real root of the equation $f(x) = x^3 - 5x + 1 = 0$ lies in the interval $(0, 1)$. Perform four iterations of the Secant method.
8. Using the Adams - Bashforth third order method. Solve the initial value problem $u' = -2tu^2$, $u(0) = 1$ on $[0, 1]$ with $h = 0.2$.
9. Fit a quadratic curve for the following data :

x	1	2	3	4	5
y	1090	1220	1390	1625	1915

ಪ್ರತಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗೂ 10 ಅಂಕಗಳು.

2. G ಗುಂಪಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಹೋಮೋಮಾರ್ಫಿಕ್ ಇಮೇಜ್ G' ಯೂ ಅದರ ಯಾವುದೋ ಒಂದು ಭಾಗಲಬ್ಧಕ್ಕೆ ಐಸೋಮಾರ್ಫಿಕ್ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಿ.
3. (ಎ) $\{f_n\}$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಸರಣಿಯಾಗಿರುವ ಪರಿಮಾಣ ವಾಗಿದ್ದಾಗ ಅದರಲ್ಲಿ
 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x), x \in [a, b]$ ಮತ್ತು $M_n = \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)|$ ನಂತರ
 $[a, b]$ ಇಂಟರ್‌ವಲ್‌ನಲ್ಲಿ $f_n \rightarrow f$ ಏಕರೂಪವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು $M_n \rightarrow 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ
ಮತ್ತು $n \rightarrow \infty$ ಹಾಗೆ ಆಗಿದ್ದರೆ ಎಂಬುದನ್ನು ದೃಢಪಡಿಸಿ.
- (ಬಿ) $\{f_n\}$ ಸರಣಿಯು, ಇಲ್ಲಿ $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ ಸೊನ್ನೆಯನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವ ಯಾವುದೇ
ಇಂಟರ್‌ವಲ್‌ನಲ್ಲಿ ಏಕರೂಪವಾಗಿ ಅಭಿಗಾಮಿಯಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿ.
4. $u - v = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2)$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು $f(z) = u + iv$ ಎನ್ನುವುದು
 $z = x + iy$ ನ ವಿಶ್ಲೇಷಕ ಪರಿಮಾಣವಾಗಿದ್ದಾಗ z ಟರ್ಮಿನಲ್‌ನಲ್ಲಿ $f(z)$ ಅನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
5. ಚಾರ್ಪಿಟ್‌ನ ವಿಧಾನದಲ್ಲಿ $p^2x + q^2y = z$ ನ ಸಂಪೂರ್ಣ ಇಂಟಿಗ್ರಲ್ ಅನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
6. 'm' ದ್ರವ್ಯರಾಶಿಯ ಒಂದು ಕಣವು ಒಂದು ಸ್ಥಾಯಿತ್ವ (conservative) ಬಲ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿ
ಚಲಿಸುತ್ತಿದೆ. (i) ಲಾಂಗ್ರಾಂಜಿಯನ್ ಅನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು (ii) ಸಿಲಿಂಡ್ರಿಕಲ್
ನಿರ್ದೇಶಾಂಕಗಳಲ್ಲಿ ಚಲನೆಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.
7. $(0, 1)$ ಇಂಟರ್‌ವಲ್‌ನಲ್ಲಿ ನೆಲೆಸಿರುವ $f(x) = x^3 - 5x + 1 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ನೈಜ
ಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ಸೀಕೆಂಟ್ ವಿಧಾನದ ನಾಲ್ಕು ಇಟರೇಶನ್‌ಗಳನ್ನು ನಿರ್ವಹಿಸಿ.
8. ಆಡಮ್ಸ್-ಬ್ಯಾಶ್‌ಫೋರ್ತ್ ಮೂರನೇ ಕ್ರಮದ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು $h = 0.2$ ರೊಂದಿಗೆ
ಪ್ರಾರಂಭಿಕ ಮೌಲ್ಯ ಸಮಸ್ಯೆ $u^1 = -2tu^2, u(0) = 1$ on $[0, 1]$ ಅನ್ನು ಬಿಡಿಸಿ.
9. ಈ ಕೆಳಕಂಡ ದತ್ತಾಂಶಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸಮ ಚತುರಸ್ತ್ರದ ವಕ್ರ (quadratic curve) ವನ್ನು ಅಳವಡಿಸಿ :

x	1	2	3	4	5
y	1090	1220	1390	1625	1915

[Turn over

10. (a) Three students A_1, A_2, A_3 write an examination. Their chances of passing are $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ and $\frac{1}{4}$ respectively. Find the probability that
- (i) at least one of them passes (ii) all of them passes.

- (b) In a bolt factory there are four machines A, B, C, D manufacturing respectively 20%, 15%, 25% and 40% of the total production, out of these 5%, 4%, 3%, 2% are defective. If a bolt drawn at random was found defective, what is the probability that it was manufactured by A or D ?

11. (a) Explain Duality in linear programming. Write the dual of the following primal linear programming problem.

$$\text{Max } z = x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$\text{subject to } 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 2$$

$$-2x_1 + x_2 - 5x_3 \geq -6$$

$$4x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- (b) Express the following linear programming problem in standard form :

$$\text{Maximize } z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

$$\text{subject to } 2x_1 - 3x_2 \leq 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 5$$

$$3x_1 + 2x_3 \leq 2, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

10. (ಎ) A_1, A_2, A_3 ಎಂಬ ಮೂವರು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಒಂದು ಪರೀಕ್ಷೆ ಬರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಇವರು ಉತ್ತೀರ್ಣರಾಗುವ ಸಾಧ್ಯತೆಯು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ ಹಾಗೂ $\frac{1}{4}$ ಆಗಿದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ (i) ಕೊನೇ ಪಕ್ಷ ಒಬ್ಬರಾದರೂ ಉತ್ತೀರ್ಣರಾಗುವ ಸಂಭಾವ್ಯತೆಯನ್ನು (ii) ಎಲ್ಲರೂ ಉತ್ತೀರ್ಣರಾಗುವ ಸಂಭಾವ್ಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ಬಿ) ಬೋಲ್ಡ್ ಕಾರ್ಖಾನೆಯೊಂದರಲ್ಲಿ A, B, C, D ಎಂಬ ನಾಲ್ಕು ಯಂತ್ರಗಳಿದ್ದು ಇವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಒಟ್ಟು ಉತ್ಪಾದನೆಯ 20%, 15%, 25% ಹಾಗೂ 40% ಉತ್ಪಾದನೆ ಮಾಡುತ್ತಿವೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ 5%, 4%, 3%, 2% ಗಳು ದೋಷಯುಕ್ತವಾಗಿವೆ. ಸುಮ್ಮನೆ ಅನಿರೀಕ್ಷಿಸಿ ಅರಿಸಿಕೊಂಡ ಒಂದು ಬೋಲ್ಡ್ ದೋಷಯುಕ್ತವಾಗಿದ್ದರೆ, ಇದು A ಅಥವಾ D ಯಂತ್ರದಲ್ಲಿ ತಯಾರಾಗಿರುವ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ ಎಷ್ಟು ?

11. (ಎ) ರೇಖೀಯ ಪ್ರೋಗ್ರಾಮಿಂಗ್ ನಲ್ಲಿರುವ ಉಭಯತ್ವ (Duality) ವನ್ನು ವಿವರಿಸಿ. ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಪ್ರೈಮಲ್ ರೇಖೀಯ ಪ್ರೋಗ್ರಾಮಿಂಗ್ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿರುವ ದ್ವಂದ್ವ (Dual) ವನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

$$\text{Max } z = x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$\text{ಇದಕ್ಕೆ ಒಳಪಟ್ಟು } 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 2$$

$$-2x_1 + x_2 - 5x_3 \geq -6$$

$$4x_1 + x_2 + x_3 \leq 6$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

(ಬಿ) ಈ ಕೆಳಕಂಡ ರೇಖೀಯ ಪ್ರೋಗ್ರಾಮಿಂಗ್ ಲೆಕ್ಕವನ್ನು ಶಿಷ್ಟರೂಪದಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿ :

$$\text{ಗರಿಷ್ಠಗೊಳಿಸಿ } z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

$$\text{ಇದಕ್ಕೆ ಒಳಪಟ್ಟು } 2x_1 - 3x_2 \leq 3$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 5$$

$$3x_1 + 2x_3 \leq 2, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

[Turn over

PART C

6×15=90

Each question carries 15 marks.

12. (a) Let R be the ring of all matrices of 2×2 over Z and

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in Z \right\}.$$

Show that S is a left ideal in R but not a right ideal.

- (b) Prove that an ideal K of a commutative ring R with identity element 1 is a maximal ideal if and only if R/K is a field.

13. (a) If $f(z)$ is analytic inside and on a simple closed curve C and if 'a' is any point within C , then show that $f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)} dz$.

Deduce

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz.$$

- (b) Evaluate $\int_C \frac{dz}{(z^2+4)^2}$ where $C : |z-i| = 2$.

14. (a) Solve $(D^2 + 4DD' - 5D'^2) z = \sin(2x + 3y)$.

- (b) Solve $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - 2 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 2e^{2x} + 3x^2y$.

15. (a) Estimate $f(7.5)$ from the table :

x	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	1	8	27	64	125	216	343	512

- (b) Find $\frac{dy}{dx}$ and $\frac{d^2y}{dx^2}$ at $x = 51$ from the following data :

x	50	60	70	80	90
y	19.96	36.65	58.81	77.21	94.61

ಪ್ರತಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗೂ 15 ಅಂಕಗಳು.

12. (ಎ) Z ಮೇಲಿನ 2×2 ಎಲ್ಲ ಮಾತೃಕೆಗಳ ರಿಂಗ್ R ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in Z \right\}.$$

R ರಲ್ಲಿ S , ಎಡ ಐಡಿಯಲ್ ಆಗಿದೆ ಆದರೆ ಬಲ ಐಡಿಯಲ್ ಅಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿ.

(ಬಿ) ಅನವ್ಯತಾ ಅಂಶ 1 ಕಮ್ಯುಟೇಟಿವ್ ರಿಂಗ್ R ರ ಐಡಿಯಲ್ K ಒಂದು ಮ್ಯಾಕ್ಸಿಮಲ್ ಐಡಿಯಲ್ ಆಗಿರುತ್ತದೆ $R|K$ ಕ್ಷೇತ್ರವಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿ ತೋರಿಸಿ.

13. (ಎ) C ಎಂಬ ಸರಳ ಸಂವೃತ ವಕ್ರದ ಹಾಗೂ ಒಳಗಡೆ $f(z)$ ಒಂದು ವಿಶ್ಲೇಷಕವಾಗಿದ್ದರೆ, ಮತ್ತು 'a' ಎಂಬುದು C ಯ ಒಳಗೆ ಇರುವ ಯಾವುದೇ ಬಿಂದುವಾಗಿದ್ದಾಗ

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)} dz \text{ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿ ಹಾಗೂ}$$

$$f^n(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \text{ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿರೂಪಿಸಿ.}$$

(ಬಿ) $\int_C \frac{dz}{(z^2+4)^2}$ ದ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ. ಇಲ್ಲಿ $C : |z-i| = 2$.

14. (ಎ) ಬಿಡಿಸಿ $(D^2 + 4DD' - 5D'^2) z = \sin(2x + 3y)$.

(ಬಿ) ಬಿಡಿಸಿ $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - 2 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 2e^{2x} + 3x^2y$.

15. (ಎ) ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಕೋಷ್ಟಕದಿಂದ $f(7.5)$ ನ್ನು ಅಂದಾಜುಮಾಡಿ :

x	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	1	8	27	64	125	216	343	512

(ಬಿ) ಈ ಕೆಳಕಂಡ ದತ್ತಾಂಶದಿಂದ $x = 51$ ರಲ್ಲಿ $\frac{dy}{dx}$ ಮತ್ತು $\frac{d^2y}{dx^2}$ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ :

x	50	60	70	80	90
y	19.96	36.65	58.81	77.21	94.61

[Turn over

16. (a) Use Simpson's one-third rule to find $\int_0^{0.6} e^{-x^2} dx$ by taking 6 sub-intervals.

Is it possible to integrate e^{-x^2} by analytical method.

- (b) Solve $\frac{dy}{dx} = x + y^2$; $y(0) = 1$ for $x = 0.2(0.2)0.4$ using Runge - Kutta method.
17. (a) Define Binomial distribution.

A department in a works has 10 machines which may need adjustment from time to time during the day. Three of these machines are old, each having a probability of $\frac{1}{11}$ of needing adjustment during the day, and 7 are new, having corresponding probabilities of $\frac{1}{21}$.

Assuming that no machine needs adjustment twice on the same day, determine the probabilities that on a particular day

- (i) Just 2 old and no new machines need adjustment.
- (ii) If just 2 machines need adjustment they are of the same type.
- (b) The daily consumption of milk in a city in excess of 20,000 litres is approximately distributed as a Gamma variate with parameters $a = \frac{1}{10,000}$ and $\lambda = 2$. The city has a daily stock of 30,000 litres. What is the probability that the stock is insufficient on a particular day.

16. (ಎ) ಸಿಂಪ್ಸನ್‌ನ $\frac{1}{3}$ ನಿಯಮವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಂಡು $\int_0^{0.6} e^{-x^2} dx$ ಬೆಲೆಯನ್ನು 6 ಉಪ-ಇಂಟರ್‌ವಲ್‌ನಲ್ಲಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ವಿಶ್ಲೇಷಕ ವಿಧಾನದಿಂದ e^{-x^2} ಅನ್ನು ಅನುಕಲನ ಮಾಡಲು ಸಾಧ್ಯವೇ.

(ಬಿ) ರುಂಗಿ - ಕುಟ್ಟ ವಿಧಾನದಿಂದ ಬಿಡಿಸಿ $\frac{dy}{dx} = x + y^2$; $y(0) = 1$ ಕ್ಕೆ $x = 0.2(0.2)0.4$.

17. (ಎ) ದ್ವಿಪದ ವಿತರಣೆ ಎಂದರೇನು ? ವಿವರಿಸಿ.

ಒಂದು ಕಾರ್ಯಾಗಾರದಲ್ಲಿರುವ ಇಲಾಖೆಯು 10 ಯಂತ್ರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದು, ದಿನದ ಹೊತ್ತಿನಲ್ಲಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಆಗಾಗ ಸರಿ ಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಮಾಡುವುದು ಅಗತ್ಯವಾಗಿದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ ಮೂರು ಯಂತ್ರಗಳು ಹಳೆಯದಾಗಿದ್ದು ದಿನದ ಹೊತ್ತಿನಲ್ಲಿ ಇವುಗಳನ್ನೇ ಸರಿ ಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಮಾಡಬೇಕಾದ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ $\frac{1}{11}$ ರಷ್ಟು ಇದೆ. 7 ಯಂತ್ರಗಳು ಹೊಸದಾಗಿದ್ದು ಇವುಗಳ ಸಂವಾದಿ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ $\frac{1}{21}$ ರಷ್ಟು ಇದೆ.

ಒಂದೇ ದಿನದಲ್ಲಿ ಯಾವ ಯಂತ್ರಕ್ಕೂ ಎರಡು ಸಲ ಸರಿ ಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಮಾಡಬೇಕಾದ ಅಗತ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿಕೊಂಡು, ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ದಿನದಂದು

- ಕೇವಲ 2 ಹಳೆಯ ಯಂತ್ರಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಸರಿಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಮಾಡುವ ಮತ್ತು ಯಾವ ಹೊಸಯಂತ್ರಕ್ಕೂ ಅದರ ಅಗತ್ಯವಿಲ್ಲದಿರುವ ಸಂಭಾವ್ಯತೆಯನ್ನು ಲೆಕ್ಕಮಾಡಿ.
- ಕೇವಲ 2 ಯಂತ್ರಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಸರಿಹೊಂದಾಣಿಕೆ ಅಗತ್ಯವಾದರೆ ಅವೆರಡೂ ಒಂದೇ ಮಾದರಿಯಾಗಿರುವ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ ಎಷ್ಟು ? ಎಂಬುದನ್ನು ಲೆಕ್ಕಮಾಡಿ.

(ಬಿ) ಒಂದು ನಗರದ ದೈನಂದಿನ ಬಳಕೆಯು 20,000 ಲೀಟರ್‌ಗೆ ಮೀರಿದ ಹಾಲನ್ನು

$a = \frac{1}{10,000}$ ಮತ್ತು $\lambda = 2$ ಪ್ಯಾರಾಮೀಟರ್‌ಗಳೊಂದಿಗೆ ಅಂದಾಜು ಗಾಮಾ ವೇರಿಯೇಟಿ ಆಗಿ ವಿತರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ನಗರವು ದೈನಂದಿನ 30,000 ಲೀಟರ್ ಹಾಲಿನ ದಾಸ್ತಾನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ದಿನದಂದು ಈ ದಾಸ್ತಾನು ಸಾಕಾಗದೆ ಹೋಗುವ ಸಂಭಾವ್ಯತೆ ಎಷ್ಟು ?

PART D

3×30=90

Answer any **three** of the following questions. Each question carries 30 marks.

18. (a) Prove that every finite group is isomorphic to a permutation group.
- (b) Let $f : R \rightarrow R'$ be a homomorphism of rings R on to R' with Kernel K . Then prove that f is one to one if and only if $K = \{0\}$.
- (c) Define a Cauchy sequence.

Prove that a necessary and sufficient condition for the convergence of a sequence (S_n) is that for each $\epsilon > 0$ there exists a positive integer m such that $|S_{n+p} - S_n| < \epsilon \forall n \geq m \wedge p \geq 1$.

- (d) Find the maxima and minima values of the function $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$, also write the saddle points.

19. (a) Define power series.

Obtain the terms upto z^3 in the Taylor series expansion of

$f(z) = \frac{z^2 + \sin^2 z}{1 - \cos z}$ about the point $z = 0$. Find its radius of convergence.

- (b) Define holonomic and non-holonomic systems. Derive Lagrange's equations for non-holonomic constraints.
- (c) A solid cylinder of mass 2 kg and radius 10 cm rolls down a plane inclined at 30° to the horizontal without slipping. Find out its acceleration, angular acceleration, velocity, distance travelled and kinetic energy after 3 sec of its motion from rest.

ಭಾಗ D

3×30=90

ಕೆಳಗಿನ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳಿಗೆ ಉತ್ತರಿಸಿ. ಪ್ರತಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗೂ 30 ಅಂಕಗಳು.

18. (ಎ) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪರಿಮಿತ ಸಮೂಹವೂ ಒಂದು ಪರಿವರ್ತನ ಸಮೂಹಕ್ಕೆ ಐಸೋಮಾರ್ಫಿಕ್ ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿ ತೋರಿಸಿ.
- (ಬಿ) ಕೆನಲ್ K ಯೊಂದಿಗೆ $f : R \rightarrow R'$ ಎಂಬುದು ರಿಂಗ್‌ಗಳ ಹೋಮೋಮಾರ್ಫಿಸಂ ಆಗಿರಲಿ. ನಂತರ f ನ್ನು ಒನ್ ಟು ಒನ್ ಎಂದು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿ ತೋರಿಸಿ $K = \{0\}$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಹಾಗೆ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ.
- (ಸಿ) ಕೌಶಿ ಸರಣಿಯನ್ನು ವಿವರಿಸಿ.
 (S_n) ಸರಣಿಯ ಅಭಿಗಾಮಿತ್ವಕ್ಕೆ ಅಗತ್ಯವಾದ ಮತ್ತು ಸಮರ್ಪಕವಾದ ಸ್ಥಿತಿ ಯಾವುದೆಂದರೆ, ಪ್ರತಿಯೊಂದು $\varepsilon > 0$ ಗೆ $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon \forall n \geq m \wedge p \geq 1$ ಆಗಿರುವಂತೆ ಒಂದು ಧನಾತ್ಮಕ ಪೂರ್ಣಾಂಕವು m ಇರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿ ತೋರಿಸಿ.
- (ಡಿ) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$ (function) ಪರಿಮಾಣಕ್ಕೆ ಮ್ಯಾಕ್ಸಿಮಾ ಮತ್ತು ಮಿನಿಮಾ ಮೌಲ್ಯಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು ಸ್ಯಾಡ್ಲ್ ಬಿಂದುಗಳನ್ನೂ ಬರೆಯಿರಿ.

19. (ಎ) ಪವರ್ ಸೀರೀಸ್ ಅನ್ನು ವಿವರಿಸಿ.

$z = 0$ ಬಿಂದುವಿನ ಮೇಲೆ $f(z) = \frac{z^2 + \sin^2 z}{1 - \cos z}$ ಇದರ ಟೈಲರ್ ಸೀರೀಸ್ ವಿಸ್ತರಣೆಯಲ್ಲಿ z^3 ವರೆಗೆ ಟರ್ಮ್‌ಗಳನ್ನು ಸಂಪಾದಿಸಿ. ಇದರ ಅಭಿಗಾಮಿತ್ವದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

- (ಬಿ) ಹಾಲೋನಾಮಿಕ್ ಮತ್ತು ನಾನ್-ಹಾಲೋನಾಮಿಕ್ ಪದ್ಧತಿಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸಿ. ನಾನ್-ಹಾಲೋನಾಮಿಕ್ ನಿರ್ಬಂಧಗಳಿಗೆ ಲಾಗ್ರಾಂಜಿಯಂ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನಿಷ್ಪತ್ತಿಮಾಡಿ.
- (ಸಿ) 2 kg ದ್ರವ್ಯರಾಶಿ ಮತ್ತು 10 ಸೆ.ಮೀ. ತ್ರಿಜ್ಯವಿರುವ ಒಂದು ಘನ ಉರುಳೆಯು ಕ್ಷಿತಿಜತಲಕ್ಕೆ 30° ಇಳುಕಲಾಗಿರುವ ಸಮತಲದ ಮೇಲೆ ಜಾರದೆ ಉರುಳುತ್ತದೆ. ಈ ಉರುಳೆಯು ವಿಶ್ರಾಂತ ಸ್ಥಿತಿಯಿಂದ ಚಲಿಸಲು ಆರಂಭಿಸಿದ 3 ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ನಂತರ ಅದರ ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ, ಕೋನೀಯ ವೇಗೋತ್ಕರ್ಷ, ವೆಲಾಸಿಟಿ, ಚಲಿಸಿದ ದೂರ ಮತ್ತು ಕೈನೆಟಿಕ್ ಶಕ್ತಿಯನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

[Turn over

20. (a) Find a real root of the equation $xe^x - 2 = 0$ correct to three decimal places using Newton - Raphson method.
- (b) Given the points $(0, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 1)$ and $(\pi, 0)$ satisfying the function $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$), determine the value of $y(\frac{\pi}{6})$ using the cubic spline approximation.
- (c) Use modified Euler's method to compute $y(0.1)$ given $\frac{dy}{dx} = x^2 + y$, $y(0) = 1$ by taking $h = 0.05$ considering the accuracy upto two approximations in each step.
21. (a) (i) Explain Sheppard's correction for errors due to grouping.
- (ii) A frequency distribution gives the following results, Coefficient of Variation = 5, Variance = 4, Karl Pearson's Coefficient of Skewness = 0.5. Find the mean and mode of the distribution.
- (b) Define discrete and continuous random variables. A random variable X has $P(x) = 2^{-x}$, $x = 1, 2, 3, \dots$. Show that $P(x)$ is a probability function. Also find $P(X \text{ even})$, $P(X \text{ being divisible by } 3)$ and $P(X \geq 5)$.
- (c) Define Poisson distribution and prove that the Poisson distribution is a limiting form of the Binomial distribution.

20. (ಎ) ನ್ಯೂಟನ್-ರಾಫ್‌ಸನ್ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಸರಿಯಾಗಿ ಮೂರು ದಶಮಾಂಶ ಸ್ಥಾನಗಳ ವರೆಗೆ $xe^x - 2 = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ನೈಜ ಮೂಲವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ಬಿ) $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) ಪರಿಮಾಣವನ್ನು ತೃಪ್ತಿಪಡಿಸುವ $(0, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 1)$ ಮತ್ತು $(\pi, 0)$

ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಕ್ಯೂಬಿಕ್ ಸ್ಪೈನ್ ಅಪ್ರಾಕ್ಸಿಮೇಶನ್ ಬಳಸಿಕೊಂಡು $y(\frac{\pi}{6})$ ರ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ಸಿ) $\frac{dy}{dx} = x^2 + y$, $y(0) = 1$ ಕೊಡಲಾಗಿದ್ದು $h = 0.05$ ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು, ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಹಂತದಲ್ಲೂ ಎರಡು ಅಪ್ರಾಕ್ಸಿಮೇಶನ್‌ಗಳವರೆಗೆ ನಿಖರತೆಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿಕೊಂಡು $y(0.1)$ ಅನ್ನು ಲೆಕ್ಕ ಹಾಕುವುದಕ್ಕಾಗಿ, ಮಾರ್ಪಾಟಾದ ಆಯಿಲರ್ ವಿಧಾನವನ್ನು ಬಳಸಿ.

21. (ಎ) (i) ಸಮೂಹ ನಿಗದಿಯಿಂದಾದ ತಪ್ಪುಗಳನ್ನು ಸರಿಪಡಿಸುವ ಶೆಪರ್ಡ್ ವಿಧಾನವನ್ನು ವಿವರಿಸಿ.

(ii) ಒಂದು ಆವರ್ತಾಂಕ ವಿತರಣೆಯು ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಫಲಿತಾಂಶಗಳನ್ನು ಕೊಡುತ್ತದೆ, ವ್ಯತ್ಯಾಸೀಯತೆಯ ಗುಣಾಂಕ = 5, ವ್ಯತ್ಯಾಸ = 4, ಕಾರ್ಲ್ ಪಾರ್ಸನ್ಸ್ ಸ್ಯೂನಿಸ್ ಗುಣಾಂಕ = 0.5. ಈ ವಿತರಣೆಯ ಮೀನ್ ಮತ್ತು ಮೋಡ್‌ನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ಬಿ) ಡಿಸ್ಕ್ರೀಟ್ ಮತ್ತು ಅವಿಚ್ಛಿನ್ನ ರ್ಯಾಂಡಮ್ ವೇರಿಯಬಲ್‌ಗಳು ಎಂದರೇನು ವಿವರಿಸಿ. ಒಂದು ರ್ಯಾಂಡಮ್ ವೇರಿಯಬಲ್ X ಎಂಬುದು $P(x) = 2^{-x}$, $x = 1, 2, 3, \dots$ ಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. $P(x)$ ಒಂದು ಸಂಭಾವ್ಯತಾ ಪರಿಮಾಣವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತೋರಿಸಿ. $P(X \text{ ಈವನ್})$, $P(X \geq 3)$ ರಿಂದ ವಿಭಜನೆ ಯಾಗುವಂಥದ್ದು ಮತ್ತು $P(X \geq 5)$ ಅನ್ನು ಕಂಡು ಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ಸಿ) ಪಾಯ್‌ಸನ್ ವಿತರಣೆ ಎಂದರೇನು ವಿವರಿಸಿ. ಪಾಯ್‌ಸನ್ ವಿತರಣೆಯು ದ್ವಿಪದ ವಿತರಣೆಯ ಮಿತಿಗೊಳಿಸುವ ರೂಪವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಸಿದ್ಧಮಾಡಿ ತೋರಿಸಿ.

[Turn over

22. (a) A company produces three products A, B and C. These products require three ores O_1 , O_2 and O_3 . The maximum quantities of the ores O_1 , O_2 and O_3 available are 22 tonnes, 14 tonnes and 14 tonnes respectively. For one tonne of each of these products, the ore requirements are

	O_1	O_2	O_3	Profit per ton in ₹ '000
A	3	1	3	1
B	-	2	2	4
C	3	3	0	5

How many tonnes of each product A, B and C should the company produce to maximize the profit? Solve by Simplex method.

- (b) There are four Jobs to be assigned to the machines. Only one Job could be assigned to one machine. The amount of time in hours required for the Jobs in a machine are given in the following matrix.

Job	Machines				
	A	B	C	D	E
1	4	3	6	2	7
2	10	12	11	14	16
3	4	3	2	1	5
4	8	7	6	9	6

Find an optimum assignment of Jobs to the machines to minimize the total processing time and also find for which machine no Job is assigned. What is the total processing time to complete all the Jobs?

22. (ಎ) ಒಂದು ಕಂಪನಿಯು A, B ಮತ್ತು C ಎಂಬ ಮೂರು ಉತ್ಪನ್ನಗಳನ್ನು ಉತ್ಪಾದಿಸುತ್ತದೆ, ಈ ಉತ್ಪನ್ನಗಳಿಗೆ O_1 , O_2 ಮತ್ತು O_3 ಎಂಬ ಮೂರು ಅದಿರುಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ. O_1 , O_2 ಮತ್ತು O_3 ಅದಿರುಗಳು ದೊರೆಯುವ ಗರಿಷ್ಠ ಪರಿಮಾಣವು ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ 22 ಟನ್‌ಗಳು, 14 ಟನ್‌ಗಳು ಮತ್ತು 14 ಟನ್‌ಗಳಾಗಿವೆ. ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ಉತ್ಪನ್ನದ ಒಂದು ಟನ್‌ಗೆ ಬೇಕಾಗುವ ಅದಿರಿನ ಪ್ರಮಾಣ ಹೀಗಿದೆ.

	O_1	O_2	O_3	ಪ್ರತಿ ಟನ್ನಿಗೆ ಲಾಭ ₹ '000 ಗಳಲ್ಲಿ
A	3	1	3	1
B	—	2	2	4
C	3	3	0	5

ಲಾಭವನ್ನು ಗರಿಷ್ಠಗೊಳಿಸುವುದಕ್ಕಾಗಿ ಕಂಪನಿಯು A, B ಮತ್ತು C ಎಂಬ ಪ್ರತಿಯೊಂದೂ ಉತ್ಪನ್ನದ ಎಷ್ಟು ಟನ್‌ಗಳನ್ನು ಉತ್ಪಾದಿಸಬೇಕು. ಸಿಂಪ್ಲೆಕ್ಸ್ ವಿಧಾನದಿಂದ ಉತ್ತರ ನೀಡಿ.

- (ಬಿ) ಯಂತ್ರಗಳಿಗೆ ಕೊಡಬೇಕಾದ ನಾಲ್ಕು ಕೆಲಸಗಳಿವೆ. ಒಂದು ಯಂತ್ರಕ್ಕೆ ಒಂದು ಕೆಲಸ ಮಾತ್ರ ಕೊಡಬಹುದು ಒಂದು ಯಂತ್ರದಲ್ಲಿನ ಕೆಲಸಕ್ಕೆ ಬೇಕಾಗುವ ಸಮಯವನ್ನು ಗಂಟೆಗಳ ಲೆಕ್ಕದಲ್ಲಿ ಕೆಳಕಂಡ ಮಾತೃಕೆಯಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ.

ಕೆಲಸ	ಯಂತ್ರಗಳು				
	A	B	C	D	E
1	4	3	6	2	7
2	10	12	11	14	16
3	4	3	2	1	5
4	8	7	6	9	6

ಒಟ್ಟು ಪ್ರಕ್ರಮ ಕಾಲವನ್ನು ಅತ್ಯಂತ ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಲು ಯಂತ್ರಗಳಿಗೆ ಕೊಡಬೇಕಾದ ಅನುಕೂಲತಮ ಕೆಲಸವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ ಮತ್ತು ಯಾವ ಯಂತ್ರಕ್ಕೆ ಕೆಲಸವನ್ನೇ ಕೊಡಲಾಗಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನೂ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ. ಎಲ್ಲ ಕೆಲಸಗಳನ್ನೂ ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸಲು ಒಟ್ಟು ಎಷ್ಟು ಪ್ರಕ್ರಿಯಾ ಕಾಲ ಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಸಿ.

[Turn over

- (c) A super market has two sales girls at the sales counters. If the service time for each customer is exponential with mean of 4 minutes, and if people arrive in a Poisson fashion at the rate of 10 an hour, then calculate the
- (i) probability that a customer has to wait for service.
 - (ii) expected percentage of idle time for each salesgirl.
 - (iii) if a customer has to wait, what is the expected length of his waiting time.

(ಸಿ) ಒಂದು ಸೂಪರ್ ಮಾರ್ಕೆಟಿನ ಮಾರಾಟದ ಕೌಟರ್‌ಗಳಲ್ಲಿ ಇಬ್ಬರು ಮಾರಾಟ ಮಾಡುವ ಹುಡುಗಿಯರಿದ್ದಾರೆ. ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ಗ್ರಾಹಕರಿಗೆ ನೀಡುವ ಸೇವೆಯ ಕಾಲವು 4 ನಿಮಿಷಗಳ ಮೀನ್ ನೊಂದಿಗೆ ಎಕ್ಸ್‌ಪೋನೇನ್ಷಿಯಲ್ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು ಜನರ ಆಗಮನವು ಗಂಟೆಗೆ 10 ರಂತೆ ಪಾಯ್‌ಸಾನ್ ರೀತಿಯಲ್ಲಿದ್ದರೆ, ಈ ಕೆಳಕಂಡವುಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಹಾಕಿ

- (i) ಗ್ರಾಹಕರು ಸೇವೆ ಪಡೆಯಲು ಕಾಯಬೇಕಾದ ಸಂಭವನೀಯತೆ.
- (ii) ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ಮಾರಾಟ ಮಾಡುವ ಹುಡುಗಿಗೆ ನಿರೀಕ್ಷಿಸ ಬಹುದಾದ ಕಾರ್ಯರಹಿತ ಕಾಲದ ಶೇಕಡಾವಾರು.
- (iii) ಗ್ರಾಹಕರೊಬ್ಬರು ಕಾಯಬೇಕಾಗಿ ಬಂದರೆ, ಅವರು ಕಾಯಬೇಕಾದ ಕಾಲದ ಪ್ರಮಾಣ ಎಷ್ಟು ?

2010

ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರ
ಪ್ರಶ್ನೆಪತ್ರಿಕೆ 2

ಸಮಯ : 3 ಗಂಟೆಗಳು]

[ಗರಿಷ್ಠ ಅಂಕಗಳು : 300

ಸೂಚನೆಗಳು

ಪ್ರತಿ ಪ್ರಶ್ನೆಯನ್ನು ಇಂಗ್ಲೀಷ್ ಹಾಗೂ ಕನ್ನಡದಲ್ಲಿ ಮುದ್ರಿಸಲಾಗಿದೆ.

ನಿಮ್ಮ ಪ್ರವೇಶ ಪತ್ರದಲ್ಲಿ ನಮೂದಿಸಿರುವ ಮಾಧ್ಯಮದಲ್ಲೇ (ಇಂಗ್ಲೀಷ್ ಅಥವಾ ಕನ್ನಡ) ನೀವು ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಬರೆಯತಕ್ಕದ್ದು; ಇದನ್ನು ಉತ್ತರ ಪತ್ರಿಕೆಯ ಮುಖಪುಟದಲ್ಲಿ ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ನೀಡಲಾದ ಜಾಗದಲ್ಲಿ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ನಮೂದಿಸತಕ್ಕದ್ದು. ಕನ್ನಡ ಪ್ರಶ್ನೆಪತ್ರಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಸಂದೇಹ ಉಂಟಾದಲ್ಲಿ, ಇಂಗ್ಲೀಷ್ ಪ್ರಶ್ನೆಪತ್ರಿಕೆಯನ್ನು ದಯವಿಟ್ಟು ಗಮನಿಸಿ.

ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಪತ್ರಿಕೆಯಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕು ಭಾಗಗಳಿವೆ :

- | | |
|---|------------|
| A | 20 ಅಂಕಗಳು |
| B | 100 ಅಂಕಗಳು |
| C | 90 ಅಂಕಗಳು |
| D | 90 ಅಂಕಗಳು |

ಪ್ರತಿ ಪ್ರಶ್ನೆಗೂ ನಿಗದಿಸಲಾದ ಅಂಕಗಳನ್ನು ಒಂದೊಂದು ಭಾಗದಲ್ಲಿಯೂ ನಮೂದಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಭಾಗ A, B ಮತ್ತು C ಯಲ್ಲಿನ ಎಲ್ಲ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಕಡ್ಡಾಯವಾಗಿ ಉತ್ತರಿಸಿ.

ಭಾಗ D ಯಲ್ಲಿಯ ಯಾವುದಾದರೂ ಮೂರು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಿ.

Note : The English version of the instructions is printed on the front cover of this question paper.

SEAL